

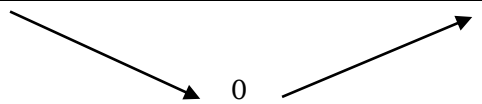
**Exercice 1 :**

1.  $f'(x) = \exp(x) - 0 - 1 = \exp(x) - 1$ .

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geq 1 \Leftrightarrow \exp(x) \geq \exp(0) \Leftrightarrow x \geq 0$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est : décroissante sur  $]-\infty, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ .

2. a..  $f(0) = \exp(0) - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f			

La fonction  $f$  admet donc un minimum en 0 et  $f(0) = 0$  ; donc pour tout  $x$  réel :  $f(x) \geq f(0)$ , donc :  $f(x) \geq 0$ .

2. b. Pour tout  $x \geq 0$  :  $f(x) \geq 0$  ; donc :  $\exp(x) - 1 - x \geq 0$  ; d'où :  $\exp(x) \geq x + 1$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$  ; donc par comparaison :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .

2. c. On pose :  $X = -x \Leftrightarrow x = -X$ . Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ .

On en déduit que :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(X)} = 0$ , car :  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(X) = +\infty$ .

**Exercice 2 :**

1.  $f(x) = \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) + 1}$ .

Pour tout  $x$  réel,  $\exp(x) > 0$ , donc :  $\exp(x) + 1 > 0$ .

La fonction  $f$  est donc définie sur  $\mathbf{R}$ .

(\*)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-2}{1} = -2$ .

© La fonction  $f$  est définie sous une forme où la limite en  $+\infty$  est indéterminée.  
Pour déterminer cette limite, il faut donc changer la forme sous laquelle le fonction s'écrit.

(\*) Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a :  $f(x) = \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) + 1} = \frac{\exp(x) \left(1 - \frac{2}{\exp(x)}\right)}{\exp(x) \left(1 + \frac{1}{\exp(x)}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{\exp(x)}}{1 + \frac{1}{\exp(x)}}$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0$  ; d'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$ .

$$2. f(x) = \frac{1}{1 - \exp(x)}.$$

$f(x)$  est défini si et seulement si :  $1 - \exp(x) \neq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \neq 1 \Leftrightarrow \exp(x) \neq \exp(0) \Leftrightarrow x \neq 0$ .

La fonction  $f$  est donc définie sur  $\mathbf{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

$$(*) \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \exp(x) = -\infty ; \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \exp(x) = 0.$$

Donc pour déterminer la limite de  $f$  en 0, il faut étudier le signe de  $(1 - \exp(x))$  au voisinage de 0.

$$1 - \exp(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \exp(x) \Leftrightarrow \exp(0) \geq \exp(x) \Leftrightarrow 0 \leq x.$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$1 - \exp(x)$	$+$	$0$	$-$

On en déduit que :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \exp(x) = 0^+, \text{ car } 1 - \exp(x) > 0 \text{ si } x < 0 ; \text{ et donc : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - \exp(x)} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \exp(x) = 0^-, \text{ car } 1 - \exp(x) < 0 \text{ si } x > 0 ; \text{ et donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \exp(x)} = -\infty.$$

### Exercice 3 :

**a.** La fonction  $\exp$  est définie sur  $\mathbf{R}$ , donc l'équation est définie sur  $\mathbf{R}$ .

$$\exp(x) = 4 \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \ln(4).$$

L'équation admet donc une unique solution :  $x = \ln(4)$ .

**b.** L'équation est définie sur  $\mathbf{R}$ .

$$\exp(2x - 1) = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln(2) \Leftrightarrow 2x = 1 + \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln(2)}{2}.$$

$$\text{L'équation admet donc une unique solution : } x = \frac{1 + \ln(2)}{2}.$$

**c.** L'équation est définie sur  $\mathbf{R}$ .

$$\exp(-x) = 5 \Leftrightarrow -x = \ln(5) \Leftrightarrow x = -\ln(5).$$

L'équation admet donc une unique solution :  $x = -\ln(5)$ .

**d.** L'équation est définie sur  $\mathbf{R}$ .

$\exp(-x + 1) = -1$  : Cette équation n'a pas de solution car la fonction  $\exp$  est strictement positive.

**e.** La fonction  $\ln$  est définie sur  $]0, +\infty[$ , donc l'équation est définie si et seulement si :

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in ]-1, +\infty[.$$

$$\text{Pour tout } x > -1 : \ln(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \exp(\ln(x + 1)) = \exp(0) \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 > -1.$$

L'équation admet donc une unique solution :  $x = 0$ .

**f.** L'équation est définie si et seulement si :  $1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[$ .

$$\text{Pour tout } x > 1 : \ln(1 - x) = 1 \Leftrightarrow 1 - x = \exp(1) \Leftrightarrow 1 = e + x \Leftrightarrow x = 1 - e < 1, \text{ car } e > 0.$$

L'équation admet donc une unique solution :  $x = 1 - e$ .

**g.** L'équation est définie si et seulement si :  $2 - 3x > 0 \Leftrightarrow 2 > 3x \Leftrightarrow \frac{2}{3} > x \Leftrightarrow x \in ]-\infty, \frac{2}{3}[$ .

Pour tout  $x < \frac{2}{3}$  :  $\ln(2 - 3x) = \ln 4 \Leftrightarrow 2 - 3x = 4 \Leftrightarrow 2 = 3x + 4 \Leftrightarrow -2 = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ .

L'équation admet donc une unique solution :  $-\frac{2}{3}$ .

**h.** L'équation est définie si et seulement si :  $4x > 0$  et  $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$  et  $x > 3 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in ]3, +\infty[$ .

Pour tout  $x > 3$  :  $\ln(4x) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4x = x - 3 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1 \leq 3$ .

L'équation n'admet donc pas de solution.

#### Exercice 4 :

$$a = \ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln 2$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -\ln(2^2) = -2 \ln 2$$

$$c = \ln(16) - 3 \ln(2) = \ln(2^4) - 3 \ln(2) = 4 \ln(2) - 3 \ln(2) = \ln 2$$

$$d = \ln(2\sqrt{2}) = \ln(2) + \ln(\sqrt{2}) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{3}{2} \ln 2$$

#### Exercice 5 :

L'équation est définie si et seulement si :  $x + 7 > 0$  et  $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -7$  et  $x > -1 \Leftrightarrow x > -1$ .

Pour tout  $x > -1$  :

$$\ln(x + 7) = 2 \ln(x + 1) \Leftrightarrow \ln(x + 7) = \ln((x + 1)^2)$$

$$\Leftrightarrow x + 7 = (x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 7 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3 \text{ (On utilise le calcul du discriminant pour déterminer les racines)}$$

$$\Leftrightarrow x = 2, \text{ car } -3 < -1.$$

L'équation admet donc une unique solution :  $2$ .

#### Exercice 6 :

$$1. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty.$$

$$1. \text{ b. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} :$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$

2. a.  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ .

(\*)  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

(\*)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$ .

(\*)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$ .

2. b.  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ .

$f(x)$  est défini si et seulement si :  $x > 0$  et  $\ln(x) \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$  et  $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

(\*)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ .

(\*)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ .

(\*)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$ .

Donc pour déterminer la limite de  $\frac{1}{\ln x}$  en 1, il faut étudier le signe de  $\ln(x)$  au voisinage de 1.

$\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \geq \exp(0) \Leftrightarrow x \geq 1$ .

x	0	1	$+\infty$
ln(x)		0	+

On en déduit que :

•  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$ , car  $\ln(x) < 0$  si  $x < 1$  ; et donc :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$ , car  $\ln(x) > 0$  si  $x > 1$  ; et donc :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$ .

### Exercice 7 :

a.  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

$f = \frac{u}{v}$ , avec :  $u(x) = \ln(x)$  et  $v(x) = x$ , et donc :  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v'(x) = 1$ .

Donc :  $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  ; d'où :  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

b.  $f(x) = (\ln x)^2$

$f = u^2$ , avec :  $u(x) = \ln(x)$ .

Donc :  $f' = 2 u u'$  ; d'où :  $f'(x) = 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$ .

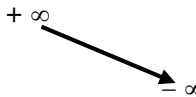
### Exercice 8 :

- $f$  est définie sur :  $]0, +\infty[$ .
- $f$  est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout  $x > 0$  :

$$f'(x) = 0 - 2 \times 1 - \frac{1}{x} = -2 - \frac{1}{x} < 0, \text{ car } x > 0, \text{ et donc : } \frac{1}{x} > 0, \text{ d'où : } -\frac{1}{x} < 0.$$

La fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - 2x = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
- On en déduit le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
f'(x)		-
f		

### Exercice 9 :

1. a. L'inéquation est définie sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x > 0 : \ln(x) \geq 3 &\Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \geq \exp(3), \text{ car la fonction exp est croissante} \\ &\Leftrightarrow x \geq e^3 \Leftrightarrow x \in [e^3, +\infty[, \text{ car } e^3 > 0. \end{aligned}$$

1. b. L'inéquation est définie sur  $\mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ réel : } \exp(x+3) < 2 &\Leftrightarrow \ln(\exp(x+3)) < \ln(2), \text{ car la fonction ln est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow x+3 < \ln(2) \Leftrightarrow x < \ln(2) - 3 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, \ln(2) - 3[. \end{aligned}$$

1. c. L'inéquation est définie sur  $]0, +\infty[$ , car :  $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x > 0 : \ln(2x) - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow \ln(2x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \exp(\ln(2x)) \leq \exp(1), \text{ car la fonction exp est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow 2x \leq e^1 \Leftrightarrow x \leq \frac{e}{2} \Leftrightarrow x \in ]0, \frac{e}{2}]. \end{aligned}$$

$$2. a. 3^n \geq 10^6 \Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow n \ln(3) \geq \ln(10^6)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^6)}{\ln(3)}, \text{ car } \ln(3) > 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 13, \text{ car } \frac{\ln(10^6)}{\ln(3)} \approx 12,58$$

$$2. b. 0,7^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \ln(0,7^n) \leq \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n \ln(0,7) \leq \ln(10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,7)}, \text{ car } \ln(0,7) < 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 26, \text{ car } \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,7)} \approx 25,82$$